Rev. de Agricultura, Piracicaba, V.73, fasc. 3, 1998

SOBRE EL COCIENTE CM (Bloques)/CM (Resíduo)

Cristián Andrés Carranza[1]

DESCRIPCION DEL PROBLEMA

En muchos libros de Estadística Experimental, las **restricciones a la casualización** son consideradas **factores**, fijos o aleatórios, en el modelo lineal que se pretende ajustar, sabiendo que ambas palabras expresan conceptos diferentes. Estrictamente, *factorial* es la relación entre tratamientos, formada por todas as combinaciones posibles de los niveles de dos o más factores. Es interesante remarcar que, cuando cada tratamiento aparece una vez en cada bloque, existe un parecido com un experimento a dos factores, sin embargo, en este último, los tratamientos no son necesariamente dispuestos como exige el diseño en bloques (PIERCE, 1983). Este hecho genera confusión en quien desea entender el modelo lineal que subyace en el diseño experimental utilizado, y torna difícil enseñar por qué el cuadrado medio del residuo no es el denominador apropiado para testar la hipótesis de que no existen diferencias entre las medias de los bloques.

Un primer ejemplo de esa confusión puede ser visto en la correcta diferenciación entre el modelo lineal para un diseño en bloques completos aleatorizados y el correspondiente a un diseño completamente aleatorizado sin repetición com esquema bifactorial de tratamientos, asumiendo que no existe interacción. En efecto, el primero puede ser escrito así:

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,2,...,b, \quad j = 1,2,...,t\,.$$

[1] Facultad de Ciencias Agrárias y Forestales, Universidad Nacional de La Plata. C.C. 31 (1900) La Plata. Argentina. e-mail: cristian@tambaqui.esalq.usp.br

donde y_{ij} es la respuesta observada, μ es la media general, β_i es el efecto del bloque i, τ_j es el efecto del tratamiento j y ε_{ij} es la variación aleatória de esa respuesta.

Para el segundo, asumiendo que no existe interacción, es:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,2,...,b, \quad j = 1,2,...,t\,.$$

donde y_{ij} es la respuesta observada, μ es la media general, α_i es el efecto del factor i, τ_j es el efecto del factor j y ε_{ij} es la variación aleatoria de esa respuesta. En esta situación, no podemos entender que los experimentos son fisicamente diferentes.

Otro problema, ya enunciado, es el de pretender testar la hipótesis nula $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_j = 0$ usando el test de F y el cuadrado medio del residuo como denominador.

Todavía existe controversia sobre el test de bloques, siendo el trabajo de CASELLA et al. (1991) la versión más actualizada sobre ese problema. Un hecho importante es que, en muchos libros de Estadística Experimental, el modelo matemático para un diseño en bloques completos aleatorizados es presentado con la misma ecuación que para un diseño completamente casualizado con estructura factorial, sin interacción y sin repetición. Así, un mismo modelo es utilizado para analizar datos obtenidos de maneras diferentes. La diferencia está, obviamente, en la aleatorización; en el primero está restringida y en el segundo no.

MONTGOMERY (1991), por citar un ejemplo, afirma que BOX, HUNTER & HUNTER (1983), utilizan el valor de F = CM(Bloques) / CM(Residuo) para testar la hipótesis de que las medias de los bloques no difieren significativamente, solamente presuponiendo que los errores son IID ~ $N(\sigma^2)$ (ignorando la restricción a la casualización). Sin embargo, una lectura cuidadosa de la obra de estos autores nos permite entender que el test está realizado solamente com fines ilustrativos; mas se debe remarcar que los autores no son claros sobre el test de F para bloques. En efecto, los autores justifican la aplicacion del test basándose en:

que los errores son IID ~ $N(\sigma^2)$;

que el test de F es una aproximación al test exacto obtenido usando la distribución de aleatorización, generada calculando el valor de F para todas las maneras posibles de disponer las respuestas en los diferentes tratamientos. La única presuposición exigida es la de que exista aleatorización entre las observaciones.

Como la aleatorización es realizada *dentro* de los bloques, la Segunda justificativa invalida el test de F, mas los autores recurren a la primera de ellas, desconsiderando, aparentemente, el hecho de que ambas estan estrechamente ligadas, en el sentido de que muestras no aleatórias no siempre son independientemente distribuidas. Mas esa desconsideración es sólo aparente, ya que los autores realizan el test de F solamente *para mayor ilustración*. (BOX, HUNTER & HUNTER, 1983, p.225) sin tratar el problema de si ese test es válido o no.

Afortunadamente, la respuesta se encuentra en esa misma obra. En efecto, en la página 104 se lee: *Mediante la introducción de la aleatorización como parte de la conducción física del experimento, podemos validar nuestros procedimientos inferenciales, cualquiera sea la forma de las perturbaciones desconocidas.*

COMO VISUALIZAR EL EFECTO DE ESA RESTRICCIÓN?

Para facilitar esa visualización, se debe recurrir a un ejemplo: Se tienen **bt** fichas, en las cuales se escriben todas las combinaciones posibles de los niveles de **b** com los de **t**, una en cada ficha. Ya en el lugar del experimento, com las **bt** parcelas identificadas, existen dos maneras posibles de la aleatorizar los tratamientos en las parcelas:

- Se sortea una ficha para cada parcela del experimento. En este caso, una ficha cualquiera, por ejemplo la $\mathbf{b_i t_j}$, tendrá la misma probabilidad ($\frac{1}{bt}$) de ser sorteada a una parcela determinada. Esta idea lleva a pensar que las fichas $\mathbf{b_i t_j}$ son **permutables**, en el sentido de que cada una de ellas podría haber sido sorteada en cualquier parcela del experimento.

- Se fija un nivel de **b**, por ejemplo $\mathbf{b_1}$, y se sortea una ficha de ese subconjunto. Aqui, una ficha cualquiera $\mathbf{b_1 t_j}$ tendrá la misma probabilidad ($\frac{1}{t}$) de ser designada a una parcela del grupo fijado (se debe interpretar que la fijación de los niveles de **b** es realizada en el experimento también, en el sentido de generar **control local**). Ahora ya no son necesarias **bt** fichas, sino solamente **t**, ya que el sorteo es realizado dentro de cada nivel de **b**. Esta otra idea lleva a pensar que las fichas $\mathbf{b_i t_j}$ no son permutables, en el sentido expuesto más arriba.

Es fácil ver que, en el primer caso, se realizó la aleatorización le un diseño enteramente casualizado com esquema factorial de ratamientos y, en el segundo, la aleatorización correspondiente a un liseño en bloques completos casualizados. El hecho de que dos probabilidades diferentes sean consideradas en la aleatorizaciones iene consecuencias que se deben reflejar en el análisis de la varianza, undamentalmente en la elección de los denominadores apropiados para testar una hipótesis determinada usando el test de F.

En el diseño en bloques, existe una aleatorización diferente para los tratamientos **dentro** de cada bloque. Es claro que, para testar el efecto de tratamientos, el residuo (denominador) deberá encontrarse **lentro** de los bloques (portanto **entre** tratamientos). De la misma orma, si el interés es testar el efecto de los bloques, deverá existir un esiduo **entre** bloques, mas eso no es posible ya que existe una erarquía en la casualización que no puede ser ignorada. ADDELMAN 1969) demuestra que, realizando repeticiones de los tratamientos **lentro** de cada bloque, y considerando esa restricción como fija, se consigue testar la hipótesis de que las medias de los bloques no difieren significativamente. Este tipo de diseño experimental se llama **bloques generalmente balanceados.**

ERROR DE RESTRICCION

ANDERSON (1970), para facilitar la interpretación de la imposición de restricciones en la casualización, creó el término **Error de Restricción** *(restriction error)*, perfeccionando esa idea en ANDERSON & McLEAN (1974). Este error es un componente aleatorio que es incorporado al modelo cuando una restricción a la casualización es impuesta. Así, para un diseño en bloques completos, tendremos solamente un error de restricción, para un quadrado latino, dos, etc.

Ejemplo

Según este autor, el modelo lineal para el diseño en bloques casualizados, considerando el error de restricción δ_i originado por la imposición de los bloques, puede ser escrito de la siguiente manera:

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + \delta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,b, \quad j = 1,2,\ldots,t.$$

En este caso y_{ij} es la respuesta observada en el bloque i que recibió el tratamiento j; μ es la media poblacional; β_i es el efecto del i-ésimo bloque; δ_i es el error de la restricción (completamente confundido con los bloques, note los subíndices iguales); τ_j es el efecto del j-ésimo tratamiento y ε_{ij} es el error aleatorio dentro del i-ésimo bloque y del j-ésimo tratamiento.

Ya se puede ver la primera ventaja: ahora se puede diferenciar el modelo lineal del esquema factorial mencionado del modelo de un diseño en bloques.

El significado práctico del erros de restrición puede ser visualizado com un ejemplo: Supóngase un experimento de variedades de caña de azúcar, donde las etapas de preparación del suelo son las siguientes: limpieza, arada, confección de los surcos y plantación. **Todas estas tareas están sujetas a variación aleatoria.** o sea, si fuera posible realizar nuevamente esas tareas en exactamente la misma área destinada, por ejemplo, al bloque 1, seguramente este bloque no sería preparado exactamente de la misma manera. Esta variación aparece solamente por la decisión de instalar un diseño en bloques casualizados. Esa es la variación explicada por el parámetro δ_i.

Sin embargo, este error de restricción está confundido com los bloques, no puede ser estimado separadamente. Mas, **el hecho de que no puede ser estimado, no implica que no exista.** Para que eso quede más claro, se incorpora ese error como una causa de variación más en el cuadro del anális de la varianza, sabiendo que no existen grados de libertad ni suma de cuadrados asociados a él, pero su respectiva componente de varianza aparecerá en la esperanza del cuadrado medio y eso forzará al experimentador a analizar cuáles serán los denominadores apropiados para testar un efecto cualquiera usando el test de F.

ANALISIS DE LA VARIANZA

Los cuadros siguientes consideran los efectos de tratamientos y bloques como aleatorios, sin embargo, las conclusiones aquí expuestas son válidas para el efecto de bloques considerado tanto fijo como aleatório.

Ignorando la Restricción en el Modelo

El cuadro del análisis de la varianza para un diseño en bloques, sin considerar el error de restricción se presenta en la **Tabla 1**.

Tabla 1. Análisis de la varianza sin considerar la restricción a la casualización.

C.V.	G.L.	ECM
Bloques	$b-1$	$\sigma_e^2 + t\sigma_b^2$
Tratamientos	$t-1$	$\sigma_e^2 + b\sigma_t^2$
Residuo	$(b-1)(t-1)$	σ_e^2

Considerando la Restricción en el Modelo

Considerando esa restricción, la **Tabla** será la siguiente.

Tabla 2. Análisis de la varianza considerando la restricción.

C.V.	G.L.	ECM
Bloques	$b-1$	$\sigma_e^2 + t\sigma_\delta^2 + t\sigma_b^2$
Error de la Restricción	0	$\sigma_e^2 + \sigma_\delta^2$
Tratamientos	$t-1$	$\sigma_e^2 + b\sigma_t^2$
Residuo	$(b-1)(t-1)$	σ_e^2

Con la **Tabla 2**, puede ser visto claramente que, para testar una hipótesis sobre las medias de los bloques, el denominador apropiado será el error de la restricción, mas éste no es estimable.

A esta misma conclusión, por camino diferente, llegaron WILK & KEMPTHORNE (1955, 1956). En efecto, LENTNER et al. (1989), considerando presupuestos comunes para el diseño en bloques (sin interacción bloque tratamiento; tratamientos apareciendo una vez en cada bloque) y suponiendo un esquema factorial de tratamientos en un diseño completamente aleatorizado sin repetición, resumen esa conclusión en el cuadro presentado en la **Tabla 3**.

Tabla 3. Resultados obtidos por WILK & KEMPTHORNE.

C.V.	G.L.	ECM
	Bloques Casualizados	
Bloques	$b-1$	$\sigma_e^2 + t\sigma_b^2$
Tratamientos	$t-1$	$\sigma_e^2 + \sigma_u^2 + b\sigma_t^2$
Residuo	$(b-1)(t-1)$	$\sigma_e^2 + \sigma_u^2$
	Factorial	
Factor A	$a-1$	$\sigma_e^2 + \sigma_u^2 + c\sigma_A^2$
Factor C	$c-1$	$\sigma_e^2 + \sigma_u^2 + a\sigma_C^2$
Residuo	$(a-1)(c-1)$	$\sigma_e^2 + \sigma_u^2$

Aqui, σ_e^2 representa la variación aleatoria; σ_b^2, σ_t^2, σ_A^2, σ_C^2 e σ_u^2 denotam las variaciones debidas a los bloques, tratamientos, factor A, factor C y entre parcelas experimentales, respectivamente. Se confirma que no existe denominador apropiado para testar la hipótesis sobre las medias de los bloques.

ALGUNAS CONSIDERACIONES

Cómo saber si fue eficaz la instalación de bloques?

Yates introdujo el concepto de **eficiencia relativa estimada (ERE).** Comparando el diseño en bloques com el completamente casualizado, se llega a:

$$\text{ERE} = \frac{(b-1)CMBloques + b(t-1)CM\,\mathrm{Re}\,siduo}{(bt-1)CM\,\mathrm{Re}\,siduo}$$

Esto es:

$$\text{ERE} = \frac{(b-1)CMBloques}{(bt-1)CM\,\mathrm{Re}\,siduo} + \frac{b(t-1)}{(bt-1)}$$

Sea $\alpha = \frac{b(t-1)}{(bt-1)}$ y $\text{H} = \dfrac{CMBloques}{CM\,\mathrm{Re}\,siduo}$

entonces:
ERE = $(1 - \alpha)H + \alpha$.

Luego:

ERE < 1	si y solamente si	$H < 1$
ERE = 1	si y solamente si	$H = 1$
ERE > 1	si y solamente si	$H > 1$

Dado que H es un cociente de dos variables aleatorias, este valor también lo es, por lo tanto, siendo:

$$H = \frac{\text{E[CM(Bloques)]}}{\text{E[CM(Residuo)]}} = \frac{\sigma_e^2 + \sigma_b^2}{\sigma_e^2 + \sigma_u^2} = \frac{\sigma_e^2 + t\sigma_\delta^2 + t\sigma_b^2}{\sigma_e^2}$$

se tiene que:

$$\hat{H} = \frac{CM(Bloques)}{CM(\mathrm{Re}\,siduo)},$$

lo que está peligrosamente cerca de transformarse en un test de F. Sin aleatorización, el test de F no es válido, sin embargo, **la relación CM (Bloques) / CM (Residuo) puede ser examinada para verificar si el efecto de los bloques fue importante para reducir el efecto de la variación aleatoria controlada.** Esa es la idea que subyace en el concepto de ERE introducido por Yates.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo abordar o problema da tilização do teste **F** para o efeito de blocos. Pretende-se esclarecer, na nedida do possível, a diferença existente entre *restrição à asualização e fator,* num delineamento experimental e no modelo inear subjacente.

Baseados na revisão e na discussão da bibliografia sobre este spectо, são fornecidos exemplos que visam a facilitar o ensino do uso propriado do quociente QM(Blocos)/QM(Resíduos).

Palavras-chave: Blocos completos casualizados, restrição à asualização, erro de restrição, análise da variância.

UMMARY

BOUT THE RATIO MS(Blocks) / MS(Error)

The aim of this work is to deal with the proper use of the **F** tatistic with regard to the block effect in a randomized block design, ut these ideas may well be extended to designs with more complex estrictions on randomization, such as the Latin square design. It is ntended to explain, as clear as possible, the differences between the erms *restrictions on randomization* and *factor*, not only from the point of view of the experimental design, but also taking in consideration the linear model behind it.

Examples are presented, intended to make these concepts easier to grasp, specifically about the proper use of the ratio MS(Blocks) / MS(Error).

Key words: Randomized complete blocks design, restriction in randomization, restriction error, analysis of variance.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ADDELMAN, S., 1969. The generalized Randomized Block Design. **Amer. Statistician, 23**(4): 35-36.

ANDERSON, V.L., 1970. Restriction Errors for Linear Models (na Aid to Develiop Models for Designed Experiments). **Biometrics, 26**(2): 255-268.

ANDERSON, V.L. & R.A. McLEAN, 1974. Restriction Errors: Another Dimension in teaching Experimental Statistics. **Statistician, 28**(4): 146-152.

BOX, G.E.P.; W.G. HUNTER & J.S. HUNTER, 1978. **Statistics for Experimenters. An Introduction to Design, Data Analysis and Model Building.** John Wiley. 653p.

LENTNER, M.; J.C. ARNOLD & K. HINKELMANN, 1989. The Efficiency of Blocking: How to Use MS(Blocks)/MS(Error) Correctly. **Amer. Statistician, 43**(2): 106-108.

MONTGOMERY, D.C., 1991. **Design and Analysis of Experiments.** 3.ed. John Wiley. 649p.

PEARCES, S.C., 1983. **The Agricultural Field Experiment. A Statistical Examination of Theory and Practice.** John Wiley. 334p.

SAMUELS, M.L.; G. CASELLA & P. McCABE, 1991. Interpreting Blocks and Random Factors. **Jour. Amer. Stat. Assoc., 86**(415): 798-807.

WILK, M.B. & O. KEMPTHORNE, 1955. Fixed, Mixed and Random Models. **Jour. Amer. Stat. Assoc., 50:** 1144-1167.

WILK, M.B. & O. KEMPTHORNE, 1956. Some Aspects of the Analysis of Factorial Experiments in a Complete Randomized Design. **Ann. Math. Stat., 27:** 950-985.